

разложения, очевидно, выполняются. Кроме того, теорема 3 немедленно распространяется на бесконечный случай.

*Следствие.* Пусть  $K$  — поле разложения для семейства  $\{f_i\}_{i \in I}$  и  $E$  — какое-нибудь другое поле разложения. Любое вложение  $E$  в  $\bar{K}$ , индуцирующее тождественное отображение на  $k$ , определяет изоморфизм  $E$  на  $K$ .

*Доказательство.* Мы сохраняем предыдущие обозначения. Заметим, что  $E$  содержит однозначно определенное поле разложения  $E_i$  многочлена  $f_i$  и  $K$  содержит однозначно определенное поле разложения  $K_i$  многочлена  $f_i$ . Любое вложение  $\sigma$  поля  $E$  в  $\bar{K}$  должно отображать  $E_i$  на  $K_i$  в силу теоремы 3 и, следовательно, переводить  $E$  в  $K$ . Так как  $K$  есть композит полей  $K_i$ , наше отображение  $\sigma$  должно переводить  $E$  на  $K$  и, следовательно, оно индуцирует изоморфизм  $E$  на  $K$ .

*Замечание.* Если  $I$  конечно и  $f_1, \dots, f_n$  — наши многочлены, то поле разложения для них — это поле разложения для одного многочлена  $f(X) = f_1(X) \dots f_n(X)$ , являющегося их произведением. Однако, даже если ограничиться только конечными расширениями, удобнее иметь дело сразу с множествами многочленов, а не с одним многочленом.

*Теорема 4.* Пусть  $K$  — алгебраическое расширение поля  $k$ , содержащееся в некотором его алгебраическом замыкании  $\bar{k}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

НОР 1. Всякое вложение  $\sigma$  поля  $K$  в  $\bar{k}$  над  $k$  является автоморфизмом поля  $K$ .

НОР 2.  $K$  — поле разложения некоторого семейства многочленов в  $k[X]$ .

НОР 3. Всякий неприводимый в  $k[X]$  многочлен, имеющий корень в  $K$ , разлагается в  $K$  на линейные множители.

*Доказательство.* Предположим, что выполняется НОР 1. Пусть  $\alpha$  — элемент из  $K$ ,  $p_\alpha(X)$  — его неприводимый многочлен над  $k$  и  $\beta$  — корень многочлена  $p_\alpha$  в  $\bar{k}$ . Тогда существует изоморфизм поля  $k(\alpha)$  на  $k(\beta)$  над  $k$ , отображающий  $\alpha$  в  $\beta$ . Продолжим этот изоморфизм до вложения  $K$  в  $\bar{k}$ . Это продолжение есть по предположению автоморфизм  $\sigma$  поля  $K$ , и, следовательно,  $\sigma\alpha = \beta$  лежит в  $K$ .

Значит, всякий корень многочлена  $p_\alpha$  лежит в  $K$  и  $p_\alpha$  разлагается на линейные множители в  $K[X]$ . Следовательно,  $K$  есть поле разложения для семейства  $\{p_\alpha\}_{\alpha \in K}$ , где  $\alpha$  пробегает все элементы поля  $R$ , и тем самым выполняется НОР 2.