Доказательство. Ядро λ — двусторонний идеал, так что отображение λ инъективно. Так как LR — двусторонний идеал, то $LR = R$ и $\lambda(L)\lambda(R) = \lambda(R)$. Для любых $x, y \in L$ и $f \in R''$ имеем $f(xy) = f(x)y$, поскольку правое умножение на y является R-эндоморфизмом L. Следовательно, $\lambda(L)$ — левый идеал в R'', так что

$$R'' = R''\lambda(R) = R''\lambda(L)\lambda(R) = \lambda(L)\lambda(R) = \lambda(R),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5 показывает, что R можно представить как кольцо эндоморфизмов некоторого конечномерного модуля над телом. Обратно:

Теорема 6. *Пусть D — тело, E — конечномерное векторное пространство над D и $R = \operatorname{End}_D(E)$. Тогда кольцо R — простое и E — простой R-модуль. Кроме того, $D = \operatorname{End}_R(E)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что E — простой R-модуль. Пусть $v \in E$, $v \neq 0$. Тогда элемент v может быть дополнен до базиса E над D и, значит, для заданного $w \in E$ существует элемент $\alpha \in R$, такой, что $\alpha v = w$. Следовательно, E не может содержать никакого инвариантного подпространства, кроме 0 и самого себя, т. е. E просто над R. Ясно, что E — точный модуль над R. Пусть $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — базис E над D. Отображение

$$\alpha \mapsto (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_m)$$

кольца R в $E^{(m)}$ является инъективным R-гомоморфизмом R в $E^{(m)}$. Для заданных $(w_1, \ldots, w_m) \in E^{(m)}$ существует элемент $\alpha \in R$, такой, что $\alpha v_i = w_i$, и, следовательно, кольцо R R-изоморфно $E^{(m)}$. Это показывает, что R (как R-модуль над собой) изоморфно прямой сумме простых модулей, а потому полупросто. Далее, все эти простые модули изоморфны друг другу и, значит, в силу теоремы 2 кольцо R простое.

Остается доказать, что $D = \operatorname{End}_R(E)$. Заметим, что E — полупростой модуль над D, так как в векторном пространстве всякое подпространство обладает дополнительным подпространством. Мы можем поэтому применить теорему плотности (R и D теперь поменялись ролями!). Пусть $\varphi \in \operatorname{End}_R(E)$ и $v \in E$, $v \neq 0$. В силу теоремы плотности существует элемент $a \in D$, такой, что $\varphi(v) = av$. Пусть $w \in E$. Существует элемент $f \in R$, такой, что $f(v) = w$. Тогда

$$\varphi(w) = \varphi(f(v)) = f(\varphi(v)) = f(av) = af(v) = aw.$$

Таким образом, $\varphi(w) = aw$ для всех $w \in E$. Это означает, что $\varphi \in D$, что и завершает наше доказательство.

Теорема 7. *Пусть k — поле, E — конечномерное векторное пространство размерности m над k и $R = \operatorname{End}_k(E)$. Тогда*