(мы снова воспользовались равномерной сходимостью) в каждой точке $z \in U$ имеет производную, равную $\varphi(z)$. Но тогда и функция

$$f(z) = c_0 + \int_{[a,z]} \varphi(\zeta)\, d\zeta$$

в каждой точке $z \in U$ имеет производную $f'(z) = \varphi(z)$ ▶

20. Свойства голоморфных функций. Отметим несколько следствий теоремы о голоморфности суммы степенного ряда.

Теорема 1. *Производная функции $f \subset H(D)$ голоморфна в области D.*

◀ Для любой точки $z_0 \in D$ мы построим круг $U = \{|z - z_0| < R\}$, принадлежащий D. По теореме 1 п. 19 функция f в этом круге представляется как сумма степенного ряда. По теореме 5 п. 19 производная $f' = \varphi$ представляется рядом, сходящимся в том же круге. Поэтому к φ можно снова применить теорему 5, и, значит, φ дифференцируема в U в смысле комплексного анализа ▶

Из этой теоремы непосредственно вытекает необходимое условие существования первообразной, о котором говорилось в п. 15:

Следствие. *Если функция f имеет в области D первообразную F, то f голоморфна в D. (В иных терминах: всякая точная в области D дифференциальная форма $f\,dz = dF$ является замкнутой в D.)*

Повторным применением теоремы 1 получается

Теорема 1'. *Любая функция $f \in H(D)$ имеет в D производные всех порядков, также принадлежащие $H(D)$ (бесконечно дифференцируема).*

Следующая теорема утверждает единственность разложения функции в степенной ряд с данным центром.

Теорема 2. *Если функция f в круге $\{|z - z_0| < R\}$ представима как сумма степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

то коэффициенты этого ряда определяются однозначно по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{2}$$

◀ Подставляя в (1) $z = z_0$, найдем $f(z_0) = c_0$. Дифференцируя ряд (1) почленно:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \ldots,$$