Определение 2. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D, называется *равностепенно непрерывным внутри* D, если для любого $\varepsilon>0$ и любого множества $K \Subset D$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon, K)>0$ такое, что

$$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon \tag{3}$$

для всех $z', z''\in K$ таких, что $|z'-z''|<\delta$, и всех $f\in\{f\}$.

Теорема 2. *Если семейство функций $\{f\}$, голоморфных в области D, равномерно ограничено внутри D, то оно и равностепенно непрерывно внутри D.*

◀ Пусть $K\Subset D$; обозначим через 2ρ расстояние между непересекающимися замкнутыми множествами $\overline{K}$ и ∂D (т. е. $\inf|\zeta-z|$ по всем $z\in\overline{K}$ и всем $\zeta\in\partial D$) и через

$$K^{(\rho)}=\bigcup_{z_0\in K}\{|z-z_0|<\rho\}$$

ρ-раздутие множества K. Так как, очевидно, $K^{(\rho)}\Subset D$, то по теореме 1 найдется постоянная M такая, что

$$|f'(z)|\leqslant M \tag{4}$$

для всех $z\in K^{(\rho)}$ и всех $f\in\{f\}$.

Пусть z', z'' — две произвольные точки K такие, что $|z'-z''|<\rho$; тогда все точки z прямолинейного отрезка $[z', z'']$ принадлежат $K^{(\rho)}$ и, следовательно, для всех $z\in[z', z'']$ и всех $f\in\{f\}$ справедливо неравенство (4). Поэтому для всех $f\in\{f\}$ мы имеем

$$|f(z')-f(z'')|=\left|\int\limits_{[z', z'']} f'(z)\,dz\right|\leqslant M|z'-z''|.$$

Отсюда и следует равностепенная непрерывность семейства $\{f\}$ на K, ибо для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\min\left(\rho, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ ▶

Определение 3. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D, называется *компактным*[1]) *в* D, если из каждой последовательности f_n функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность f_{n_k}, сходящуюся равномерно на любом $K\Subset D$.

[1]) Будем рассматривать функции, определенные в области D, как точки некоторого пространства $A(D)$. В этом пространстве введем топологию, назвав *сходящейся* любую последовательность f_n, равномерно сходящуюся на каждом компактном подмножестве $K\Subset D$. Тогда компактность семейства функций $\{f\}$ сводится к компактности соответствующего множества точек в пространстве $A(D)$. Это замечание оправдывает сделанный выбор термина.