

В заключение этого параграфа приведем сводку условий, характеризующих области голоморфности в  $\mathbb{C}^n$ .

Теорема 4. Эквивалентны следующие пять условий:

(I)  $D$  — область голоморфности (т. е. существует функция  $f \in H(D)$ , не продолжаемая голоморфно в более широкую область, см. п. 20);

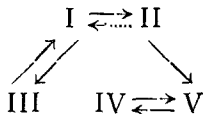
(II)  $D$  не расширяема голоморфно в каждой граничной точке (т. е. для любой точки  $\zeta \in \partial D$  существует окрестность  $U$  и функция  $f \in H(D \cap U)$ , не продолжаемая голоморфно в точку  $\zeta$ , см. п. 24);

(III)  $D$  голоморфно выпукла (т. е. для любого множества  $K \Subset D$  голоморфно выпуклая оболочка  $\hat{K}_H = \{z \in D: |f(z)| \leq \|f\|_K\}$  для всех  $f \in H(D)\} \Subset D$ , см. п. 21);

(IV)  $D$  псевдовыпукла (т. е. функция  $-\ln e(z, \partial D)$  является плюрисубгармонической в  $D$ , см. п. 26);

(V)  $D$  выпукла в смысле Леви (т. е. не существует последовательности компактных аналитических поверхностей  $S_\nu \rightarrow S$ ,  $\partial S_\nu \rightarrow \partial S$  таких, что  $S_\nu, \partial S \Subset D$ , а  $S$  содержит точку  $\zeta \in \partial D$ , см. п. 24).

◀ Выше были доказаны импликации, изображенные сплошными стрелками на схеме



(импликация (I)  $\rightarrow$  (II) тривиальна, импликации (I)  $\rightleftharpoons$  (III) составляют содержание теоремы 4 п. 21, (II)  $\rightarrow$  (V) — теоремы 1 п. 24, (IV)  $\rightleftharpoons$  (V) — теорем 2 и 3 этого пункта).

Изображенная пунктирной стрелкой импликация (II)  $\dashrightarrow$  (I) составляет содержание теоремы Ока, решающей проблему Леви, о которой мы говорили в п. 24; эта теорема будет доказана в гл. IV. Пользуясь теоремой Ока, мы докажем сейчас, что (IV)  $\rightarrow$  (I), и это замкнет цепочку эквивалентностей.

Итак, пусть для некоторой области  $D \subset \mathbb{C}^n$  функция

$$\varphi(z) = -\ln e(z, \partial D)$$

плюрисубгармонична в  $D$ . По теореме 4 п. 25 построим последовательность функций  $\varphi_\mu \searrow \varphi$ , плюрисубгармонических класса  $C^\infty$  в открытых множествах  $G_\mu$ , причем  $G_\mu$  образуют возрастающую последовательность, аппроксимирующую область  $D$  изнутри.

Так как функция  $\varphi(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \partial D$ , то для любого  $\mu$  можно найти номер  $\nu = \nu(\mu)$  такой, что множество

$$\{z \in D: \varphi(z) < \mu\} \Subset G_\nu.$$