

лютную» параллельность, многообразие следует наделить ещё одной структурой, называемой *аффинной связностью*. Это делается в гл. 6, посвящённой римановой геометрии. Здесь мы рассмотрим другую конструкцию, полезную при решении любой задачи, в которой центральную роль играет конгруэнция. Конгруэнция сама даёт возможность ввести понятие параллельности в различных точках. Для сравнения векторов в точках λ и $\lambda + \Delta\lambda$, принадлежащих некоторой кривой, достаточно выполнить перенос Ли вектора в точке $\lambda + \Delta\lambda$ обратно в точку λ . В результате в точке λ получится новый вектор, вычитая который из старого можно найти разность между ними. Заметим, что эта разность определена *однозначно*, следовательно, заданная конгруэнция однозначно определяет производную. Но эта производная зависит от конгруэнции.

Выведем аналитические формулы для вычисления производной. Для начала рассмотрим скалярную функцию. Вычислим значение скаляра в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$, перенесем его обратно в точку λ_0 , вычтем из него значение скаляра в точке λ_0 , разделим эту разность на $\Delta\lambda$ и перейдем к пределу при $\Delta\lambda \rightarrow 0$. Более подробно, значение скалярного поля f в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$ равно $f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. В результате переноса этого значения мы получим новое (ли-тянутое) поле f^* , удовлетворяющее соотношению $df^*/d\lambda = 0$. Очевидно, его значение в точке λ_0 то же самое, что и в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$: $f^*(\lambda_0) = f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Следовательно, определённая выше производная имеет вид

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f^*(\lambda_0) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \left(\frac{df}{d\lambda} \right)_{\lambda_0}. \quad (3.2)$$

Полученная формула для *производной Ли* функции f не является, конечно, неожиданной. Для оператора взятия производной Ли имеется специальное обозначение: $\mathcal{L}_{\bar{V}}$; здесь \bar{V} — векторное поле, порождающее отображение переноса (в нашем случае поле $d/d\lambda$). Мы доказали, что для функций

$$\diamond \quad \mathcal{L}_{\bar{V}}f = \bar{V}(f) = df/d\lambda. \quad (3.3)$$

Теперь сделаем то же для векторного поля $\bar{U} = d/d\mu$. Поскольку вектор определяется своим действием на функции, мы используем в дальнейших рассуждениях *произвольную* функцию f . В точке λ_0 поле \bar{U} даёт производную $(df/d\mu)_{\lambda_0}$, а в точке $\lambda + \Delta\lambda$ — производную $(df/d\mu)_{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Перенос $\bar{U}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$, как в конце § 3.3, мы получаем новое, ли-тянутое поле $\bar{U}^* = d/d\mu^*$, удовлетворяющее соотношениям $[\bar{U}^*, \bar{V}] = 0$ и $\bar{U}^*(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \bar{U}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Из обращения коммутатора в