В отличие от формулы (4.2) множитель $1/2!$ здесь *отсутствует*!

Упражнение 4.5. Проверьте, что $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$ есть два-форма. Покажите, что $\tilde{p} \wedge \tilde{p} = 0$.

Упражнение 4.6. Пусть $\{\bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — базис данного векторного пространства, а $\{\tilde{\omega}^j\}$ — двойственный ему базис один-форм. Покажите, что $\{\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k,\ j, k = 1, \ldots, n\}$ будет базисом векторного пространства всех два-форм. Указание: для произвольной два-формы $\tilde{\alpha}$ рассмотрите числа $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ и покажите, что

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2!} \alpha_{ij} \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j. \tag{4.9}$$

Обратите внимание на множитель $1/2!$ в (4.9); он обусловлен тем, что в рассматриваемую сумму по (i, j) равный вклад вносят $\tilde{\omega}^i \otimes \tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^j \otimes \tilde{\omega}^i$. Появление этого множителя именно здесь объясняется тем, что мы не ввели его в определение внешнего произведения (см. (4.8)), как это делается в некоторых руководствах. Это дело вкуса.

Формула для внешнего произведения естественным образом распространяется на три-формы:

$$\begin{aligned} \tilde{p} \wedge (\tilde{q} \wedge \tilde{r}) &= (\tilde{p} \wedge \tilde{q}) \wedge \tilde{r} = \tilde{p} \wedge \tilde{q} \wedge \tilde{r} \\ &\equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{r} + \tilde{q} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{p} + - \ldots; \end{aligned} \tag{4.10}$$

фигурирующие здесь перестановки и знаки те же, что и в предыдущем параграфе. Заметим, что эта формула и её обобщение на случай любого конечного числа один-форм позволяют определить внешние произведения для произвольных p- и q-форм, ибо, согласно упр. 4.6, произвольную p-форму можно представить в виде линейной комбинации внешних произведений p один-форм (базисных один-форм).

Множество всех форм любой степени, снабжённое антикоммутативным умножением $\wedge$, называется *алгеброй Грассмана* (или *грассмановой алгеброй*).

Упражнение 4.7. *Покажите*, что сумма размерностей всех пространств p-форм, $p \leqslant n$, равна 2^n. (Указание: используйте биномиальную теорему.) Такова размерность пространства грассмановой алгебры.)

Упражнение 4.8. Покажите, что если $\tilde{p}$ — один-форма, а $\tilde{q}$ — два-форма, то

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk} = p_i q_{jk} + p_j q_{ki} + p_k q_{ij} = 3p_{[i} q_{jk]}.$$