точки. Векторы, торчащие из разных точек, не имеют никакого отношения друг к другу. Касательные векторы лежат не в M, а в *касательном пространстве* к M в точке P, которое обозначается через T_P. Для привычных многообразий, таких как поверхность сферы, определённое выше касательное пространство совпадает, как легко видеть, с касательной плоскостью к сфере в данной точке. Для более абстрактных многообразий такое наглядное представление получить труднее.

Мы будем использовать термин *вектор* для вектора, торчащего в данной точке P многообразия M. Термин *векторное поле* будет обозначать правило, задающее вектор в каждой точке M.

2.8. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ И БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Для любой точки P пространство T_P является векторным пространством той же размерности n, что и само многообразие. Любая совокупность n линейно-независимых векторов в T_P образует *базис* в T_P. Выбирая тот или иной базис в каждом T_P для всех точек P из M, мы получаем базисные векторные поля. Если в окрестности U точки P задана система координат $\{x^i\}$, то в каждой точке из U определён *координатный базис* $\{\partial/\partial x^i\}$.

Но вовсе не обязательно работать с координатным базисом — векторы можно записывать и по отношению к произвольному базису $\{\bar{e}_i\}$. Здесь индекс i используется для нумерации базисных векторов. Он *не* обозначает компоненту чего-либо. В точке P произвольный вектор V может быть записан в виде

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V^{j'} \bar{e}_j.$$

Числа $\{V^i\}$ являются компонентами вектора $\bar{V}$ относительно базиса $\{\partial/\partial x^i\}$. Числа $\{V^{j'}\}$ — компоненты $\bar{V}$ относительно $\{\bar{e}_j\}$; они связаны с V^i согласно обычному закону преобразования векторов, о чём ещё пойдет речь ниже. Если $\bar{V}$ и базисы $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\bar{e}_j\}$ рассматриваются как векторные поля, то компоненты $\{V^i\}$ и $\{V^{j'}\}$ поля $\bar{V}$ являются *функциями* на M. Векторное поле называется дифференцируемым, если эти функции дифференцируемы.

Мы неявно предположили выше, что векторы $\{\partial/\partial x^i\}$ для произвольной координатной системы линейно-независимы в каждой точке P из U. Какие у нас соображения в пользу этого? Покажем, что это есть в точности условие того, что координаты являются *хорошими* в точке P, т. е. дают 1-1-отображение некоторой окрестности U точки P на соот-