Теорема 3.29 *). *Существует n линейно независимых постоянных векторов (столбцов) $(k=1, \ldots, s;\ j_k=1, \ldots, q_k)$, удовлетворяющих соотношениям*

$$\begin{aligned}
&Ae_{(k1)} = \lambda_k e_{(k1)},\\
&Ae_{(k2)} = \lambda_k e_{(k2)} + e_{(k1)} \quad k=1, \ldots, s; \quad q_1 + \ldots + q_s = n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Ae_{(kq_k)} = \lambda_k e_{(kq_k)} + e_{(kq_k-1)},
\end{aligned} \tag{3.99}$$

причем сумма q_k, отвечающих одинаковым λ_k, равна m, где m — кратность корня λ_k характеристического уравнения (3.90).

В (3.99) через $e_{(k1)}$ обозначен собственный вектор, отвечающий λ_k. Векторы $e_{(k2)}, \ldots, e_{(kq_k)}$ называются *присоединенными векторами*, порожденными собственным вектором $e_{(k1)}$. Таким образом, каждому λ_k отвечают q_k линейно независимых векторов, среди которых один собственный вектор и остальные присоединенные, а всем $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ отвечают n линейно независимых векторов. Напомним, что λ_k для разных k могут быть одинаковыми.

Рассмотрим λ_k. Ему заведомо отвечает решение $y_{(k1)} = e_{(k1)} e^{\lambda_k x}$. Оказывается, ему отвечает еще $q_k - 1$ (и всего, таким образом, q_k) решений, как утверждается следующей теоремой.

Теорема 3.30. *Каждому λ_k отвечает q_k решений вида*

$$\begin{aligned}
&y_{(k1)} = e_{(k1)} \exp \lambda_k x,\\
&y_{(k2)} = (e_{(k2)} + x e_{(k1)}) \exp(\lambda_k x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{(kj)} = \left(e_{(kj)} + x e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e_{(k1)}\right) \exp(\lambda_k x),\\
&y_{(kq_k)} = \left(e_{(kq_k)} + x e_{(k,q_k-1)} + \ldots + \frac{x^{q_k-1}}{(q_k-1)!} e_{(k1)}\right) \exp(\lambda_k x).
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Доказательство. Это нетрудно доказать непосредственной проверкой, пользуясь (3.99). Действительно,

$$\begin{aligned}
&(A - ED)\left\{e_{(kj)} + x e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) =\\
&= (A - \lambda_k E)\{\ldots\} - \left\{e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) =\\
&= \exp(\lambda_k x)\left\{(A - \lambda_k E) e_{kj} + \ldots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda_k E) e_{(k1)}\right\} -\\
&\quad - \left\{e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) =
\end{aligned}$$

*) Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра.— 3-е изд.— М.: Наука, 1984.