Перейдем в уравнении (7.74) к новой неизвестной функции u, положив

$$y = uv, \quad \text{где} \quad v = \exp\left[\frac{i}{\mu}\int_a^x Q(x)\,dx\right]. \tag{7.75}$$

Заметим, что v в случае $Q = \mathrm{const}$ переходит в $\exp\left[\frac{i}{\mu}Q(x-a)\right]$ и выражение $y = uv$, где $u = \mathrm{const}$, является просто точным решением.

Произведя в (7.74) указанную замену, получим уравнение $\mu u'' + 2iu'Q + iuQ' = 0$, которое запишем в виде системы

$$\mu z' = -2izQ - iuQ', \quad u' = z. \tag{7.76}$$

Положив здесь формально $\mu = 0$, получим $2zQ = -uQ'$, $u' = z$, откуда

$$u' = -\frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}u.$$

Возьмем частное решение этого уравнения, имеющее вид

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}}. \tag{7.77}$$

Оказывается, если $\bar{u}(t)$ подставить в (7.75) вместо u, то получится приближенное (в асимптотическом смысле) представление для некоторого решения уравнения (7.74), которое назовем $y_1(x)$. Обозначим через $y_2(x)$ решение, комплексно сопряженное $y_1(x)$: $y_2 = \overset{*}{y}_1$.

Теорема 7.6. *Пусть функция $Q(x) > 0$ и трижды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ существует фундаментальная система решений уравнения (7.74) вида*

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[\frac{1}{\sqrt{Q(x)}} + \varepsilon_1(x,\mu)\right]\exp\left[\frac{i}{\mu}\int_a^x Q(x)\,dx\right], \\ y_2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{Q(x)}} + \varepsilon_2(x,\mu)\right]\exp\left[-\frac{i}{\mu}\int_a^x Q(x)\,dx\right], \end{aligned} \tag{7.78}$$

причем $\varepsilon_1(x,\mu) = \mathcal{O}(\mu)$, $\varepsilon_2(x,\mu) = \mathcal{O}(\mu)$.

Доказательство. Положим $u - \bar{u} = \delta$, $z - \bar{z} = \Delta$, где $\bar{u}$ определено формулой (7.77), а $\bar{z} = \bar{u}'$. Для Δ и δ получим систему

$$\mu\Delta' = -2iQ\Delta - iQ'\delta - \mu\bar{z}', \qquad \delta' = \Delta \tag{7.79}$$

и определим эти функции начальными условиями

$$\delta(a) = 0, \qquad \Delta(a) = 0 \tag{7.80}$$

(тем самым мы фактически задаем начальные условия для u и z).