

определению удовлетворяют соотношению $\frac{1}{i} [f, g] = \text{id}$. Для них

$$\widehat{\Delta f}_\psi \cdot \widehat{\Delta g}_\psi \geq \frac{1}{2}.$$

каково бы ни было состояние ψ . Заметим, что в конечномерных пространствах таких пар нет, ибо $\text{Tr} [f, g] = 0$, $\text{Tr} \text{id} = \dim \mathcal{H}$. Однако в бесконечномерных пространствах они существуют. Классический пример:

$$\frac{1}{i} \left[x, \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \right] = \text{id}.$$

Эти операторы появляются в квантовых моделях физических систем, которые на классическом языке называются «частица, движущаяся в одномерном потенциальном поле».

Опишем эти и некоторые другие наблюдаемые подробнее.

4. а) *Наблюдаемая координаты*. Это оператор умножения на x в пространстве комплексных функций на \mathbf{R} (или некоторых подмножествах \mathbf{R}) со скалярным произведением $\int f(x) \bar{g}(x) dx$. Подразумевается квантовая система: «частица, движущаяся по прямой, во внешнем поле».

б) *Наблюдаемая импульса*. Это оператор $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ в аналогичных пространствах функций. (При нем обычно пишут множителем постоянную Планка \hbar ; это относится к выбору системы единиц, на котором мы не останавливаемся.)

в) *Наблюдаемая энергии квантового осциллятора*. Это — оператор $\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right]$, снова в подходящих единицах.

г) *Наблюдаемая проекции спина* для системы «частица со спином $1/2$ ». Это любой самосопряженный оператор с собственными значениями $\pm 1/2$ на двумерном унитарном пространстве. Дальнейшие подробности о нем будут даны позже.

В примерах а) — в) мы намеренно не уточняли, в каких унитарных пространствах действуют наши операторы. Они существенно бесконечномерны и строятся и изучаются средствами функционального анализа. О примере г) мы скажем кое-что еще ниже.

5. Наблюдаемая энергии и эволюция системы во времени.

В описание любой квантовой системы вместе с ее пространством состояний \mathcal{H} входит задание фундаментальной наблюдаемой $H: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, которая называется *наблюдаемой энергии*, или *оператором Гамильтона*, или *гамильтонианом*.

В ее терминах формулируется последний из основных постулатов квантовой механики.

Если в момент времени 0 система находилась в состоянии ψ и за промежуток времени t развивалась как изолированная система, в частности, над ней не производились измерения, то в мо-