

Наконец, барицентрические комбинации ведут себя как линейные комбинации относительно аффинных отображений.

**18. Предложение.** а) Пусть  $f: A_1 \rightarrow A_2$  — аффинное отображение и  $a_0, \dots, a_s \in A_1$ . Тогда

$$f\left(\sum_{i=0}^s x_i a_i\right) = \sum_{i=0}^s x_i f(a_i),$$

если  $\sum_{i=0}^s x_i = 1$ .

б) Пусть  $a_0, \dots, a_n$  задают барицентрическую систему координат в  $A_1$ . Тогда для любых точек  $b_0, \dots, b_n \in A_2$  существует единственное аффинное отображение  $f$ , переводящее  $a_i$  в  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Доказательство. Выбрав  $a \in A_1$ , получим

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^s x_i a_i\right) &= f\left(a + \sum_{i=0}^s x_i (a_i - a)\right) = f(a) + Df\left(\sum_{i=0}^s x_i (a_i - a)\right) = \\ &= f(a) + \sum_{i=0}^s x_i Df(a_i - a) = f(a) + \sum_{i=0}^s x_i (f(a_i) - f(a)) = \sum_{i=0}^s x_i f(a_i) \end{aligned}$$

по предложению п. 15, что доказывает утверждение а).

Если  $a_0, \dots, a_n$  образуют барицентрическую систему координат в  $A_1$ , то по следствию п. 16 всякая точка  $A$  представляется единственной барицентрической комбинацией  $\sum_{i=0}^n x_i a_i$ . Определим

тогда теоретико-множественное отображение  $f: A_1 \rightarrow A_2$  формулой

$f\left(\sum_{i=0}^n x_i a_i\right) = \sum_{i=0}^n x_i b_i$ . В силу а) это единственное возможное определение, и нужно лишь проверить, что  $f$  — аффинное отображение. Действительно, вычисляя, как в предложении п. 15, получаем

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n x_i a_i\right) - f\left(\sum_{i=0}^n y_i a_i\right) &= \sum_{i=0}^n x_i b_i - \sum_{i=0}^n y_i b_i = b_0 + \sum_{i=0}^n x_i (b_i - b_0) - \\ &- \left[b_0 + \sum_{i=0}^n y_i (b_i - b_0)\right] = \sum_{i=0}^n (x_i - y_i) (b_i - b_0) = Df\left(\sum_{i=0}^n x_i a_i - \sum_{i=0}^n y_i a_i\right), \end{aligned}$$

где  $Df: L_1 \rightarrow L_2$  — линейное отображение, переводящее  $a_i - a_0$  в  $b_i - b_0$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ . Оно существует, ибо  $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$  по предположению образуют базис  $L_1$ .

**19. Замечания.** В аффинном пространстве  $\mathbb{R}^n$  барицентрическая

комбинация  $\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} a_i$  представляет положение «центра масс» системы единичных масс, помещенных в точках  $a_i$ . Этим объясняется терминология. Если  $a_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (единица на  $i$ -м месте), то множество точек с барицентрическими координатами  $x_1, \dots, x_n$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$ , составляет пересечение линейного много-