Действительно, пусть $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ — цепочка подмодулей в M. Пусть a_0 таково, что обе цепочки $M_1 \cap N \subset M_2 \cap N \subset \ldots$ и $(M_1+N)/N \subset (M_2+N)/N \subset \ldots$ стабилизируются при $a \geqslant a_0$. Тогда и цепочка $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ стабилизируется при $a \geqslant a_0$.

Обратное утверждение очевидно.

в) *Прямая сумма конечного числа нётеровых модулей нётерова.*

Действительно, пусть $M = \bigoplus_{i=0}^{n} M_i$, M_i нётеровы. Проведем индукцию по n. Случай $n=1$ очевиден. При $n \geqslant 2$ модуль M содержит подмодуль, изоморфный M_n, с фактором, изоморфным $\bigoplus_{i=0}^{n-1} M_i$. Оба этих модуля нётеровы, так что M нётеров в силу б).

г) *Кольцо $A^{(n)}$ нётерово как модуль над самим собой. Иными словами, любой идеал в $A^{(n)}$ конечно порожден.*

Это — основной частный случай теоремы, установленный впервые Гильбертом. Доказывается он индукцией по n. Случай $n=-1$, т. е $A^{(-1)} = \mathscr{K}$, очевиден. В самом деле, любой идеал I в поле $\mathscr{K}$ совпадает либо с $\{0\}$, либо с $\mathscr{K}$: если $a \in I$, $a \neq 0$, то $b = (ba^{-1})a \in I$ для всех $b \in \mathscr{K}$. Индуктивный шаг основан на рассмотрении $A^{(n)}$ как $A^{(n-1)}[x_n]$. Пусть $I^{(n)} \subset A^{(n)}$ — идеал. Представим каждый элемент из $I^{(n)}$ как многочлен по степеням x_n с коэффициентами из $A^{(n-1)}$. Множество всех старших коэффициентов таких многочленов есть идеал $I^{(n-1)}$ в $A^{(n-1)}$. По предположению индукции он имеет конечное число образующих $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. К каждой образующей φ_i подберем элемент $f_i = \varphi_i x_n^{d_i} + \ldots$ из $I^{(n)}$, где многоточием обозначены члены низших степеней по x_n. Положим $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{d_i\}$. Многочлены $f_1, \ldots, f_m$ порождают в $A^{(n)}$ некоторый идеал $I \subset I^{(n)}$.

Пусть теперь $f = \varphi x^s +$ (члены низших степеней) — любой элемент из $I^{(n)}$. По определению $\varphi \in I^{(n-1)}$, так что $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_m\varphi_m$. Если $s \geqslant d$, то многочлен $f - \sum \alpha_i f_i x^{s-d_i}$ принадлежит $I^{(n)}$ и его степень $< s$. Действуя аналогичным образом, получим в результате выражение $f = g + h$, где $h \in I$, а g — многочлен из $I^{(n)}$ степени, меньшей d.

Все многочлены из $I^{(n)}$ степени $< d$ образуют подмодуль J в $A^{(n-1)}$-модуле, порожденном конечной системой $\{1, x_n, \ldots, x_n^{d-1}\}$. В соответствии с предположением индукции о нётеровости $A^{(n-1)}$ и с утверждением в) подмодуль J конечно порожден.

Мы доказали, что $I^{(n)} = I + J$ — сумма двух конечно порожденных модулей. Поэтому идеал $I^{(n)}$ конечно порожден.

Теперь мы можем без труда завершить доказательство теоремы. Пусть модуль M над $A^{(n)}$ имеет конечное число образующих $m_1, \ldots$ $\ldots, m_k$. Тогда имеется сюръективный гомоморфизм $A^{(n)}$-модулей

$$\underbrace{A^{(n)} \oplus \ldots \oplus A^{(n)}}_{k \text{ раз}} \to M: (f_1, \ldots, f_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} f_i m_i.$$