9. Пусть $g: L \to M$ — линейное отображение. Мы уже определили ядро и образ g; дополним это определение, положив

$$\text{кообраз } g\colon \operatorname{Coim} g = L/\operatorname{Ker} g,$$
$$\text{коядро } g\colon \operatorname{Coker} g = M/\operatorname{Im} g.$$

Имеется цепочка линейных отображений, «разбирающая g на части»,

$$\operatorname{Ker} g \xrightarrow{i} L \xrightarrow{c} \operatorname{Coim} g \xrightarrow{h} \operatorname{Im} g \xrightarrow{j} M \xrightarrow{f} \operatorname{Coker} g,$$

где все отображения, кроме h, — канонические вложения и факторизация, а h — единственное отображение, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \operatorname{Coim} g \arrow[rr, "h"] & & \operatorname{Im} g \end{tikzcd}$$

Оно определено однозначно, потому что $\operatorname{Ker} c = \operatorname{Ker} g$, и является изоморфизмом, потому что обратное отображение тоже существует и определено однозначно.

Смысл объединения этих пространств в пары (с приставкой «ко» и без нее) объясняется в теории двойственности (см. следующий параграф и упражнение 1 к нему).

10. Конечномерная альтернатива Фредгольма. Пусть $g: L \to M$ — линейное отображение. Число

$$\operatorname{ind} g = \dim \operatorname{Coker} g - \dim \operatorname{Ker} g$$

называется *индексом* оператора g. Из предыдущего пункта следует, что *если L и M конечномерны, то индекс g зависит только от L и M*:

$$\operatorname{ind} g = (\dim M - \dim \operatorname{Im} g) - (\dim L - \dim \operatorname{Im} g) = \dim M - \dim L.$$

В частности, если $\dim M = \dim L$, например, если g — линейный оператор на L, то $\operatorname{ind} g = 0$ для любого g. Отсюда вытекает так называемая альтернатива Фредгольма:

либо уравнение $g(x) = y$ разрешимо для всех y, и тогда уравнение $g(x) = 0$ имеет лишь нулевые решения;

либо это уравнение разрешимо не для всех y, и тогда однородное уравнение $g(x) = 0$ имеет ненулевые решения.

Точнее, *если* $\operatorname{ind} g = 0$, *то размерность пространства решений однородного уравнения равна коразмерности пространства правых частей, при которых разрешимо неоднородное уравнение.*