Определение 1. *Пусть* $a > 0$, *а* x — *произвольное вещественное число. Пусть, далее,* $\{r_n\}$ — *последовательность рациональных чисел, сходящаяся к числу* x *(для любого* x *такая последовательность всегда существует, см. п. 3.6). Положим по определению*

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в том смысле, что указанный предел всегда существует и не зависит от выбора рациональной последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к числу x.

Докажем это. Пусть последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. Покажем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши (см. п. 3.3) и, значит, является сходящейся последовательностью. Для этого нам надо оценить разность

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|. \tag{7.6}$$

Последовательность $\{r_n\}$ сходится и, значит, ограничена (см. п. 3.2), поэтому существует такое число A, которое без ограничения общности можно считать рациональным (почему?), что $-A < r_n < A$. Отсюда в случае $a \geqslant 1$ имеем $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, а в случае $a < 1$ соответственно $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому при любом $a > 0$ существует такое число B, что

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

($B = a^A$ при $a \geqslant 1$ и $B = a^{-A}$ при $a < 1$), т. е. последовательность a^{r_n} ограничена сверху числом B.

Далее, по лемме 2 для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{B}\right)$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих условию $|r| < \delta$, выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

Из сходимости же последовательности $\{r_n\}$ в силу критерия Коши (см. п. 3.3) следует, что для найденного $\delta > 0$ существует такой номер n_δ, что $|r_n - r_m| < \delta$ для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ и, значит, в силу (7.8)

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

Из (7.6), (7.7) и (7.9) следует, что $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$. Откуда в силу критерия Коши получаем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.