ренцируемость функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в то время как в п. 20.3 — лишь существование у этих функций соответствующих частных производных.

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Если u и v суть функции какого-то числа переменных, то с помощью формулы (20.28) легко получаются следующие:

$$1.\quad d(u+v) = du + dv.$$

$$2.\quad d(uv) = v\,du + u\,dv. \tag{20.36}$$

$$3.\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Докажем, например, формулу 3. Пусть $z = \frac{u}{v}$, где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $v = v(x_1, \ldots, x_n)$. Замечая, что $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, имеем, согласно формуле (20.28),

$$dz = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Формула 3 доказана.

При вычислении конкретных дифференциалов функций многих переменных можно широко использовать формулы, полученные нами раньше (см. § 9) для дифференциалов элементарных функций. Заметим для этого следующее: пусть функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ представлена в виде $y = F(u)$, где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда при соответствующих предположениях, согласно формуле (20.28),

$$dy = F'(u)\,du, \qquad u = u(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, если $y = \sin u$, то $dy = \cos u\,du$; $y = \ln u$, то $dy = \frac{du}{u}$; если $y = \operatorname{arctg} u$, то $dy = \frac{du}{1+u^2}$ и т. д. (подчеркнем, что здесь везде $u = u(x_1, \ldots, x_n)$).

В качестве примера найдем дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Вычисления производятся в следующем порядке:

$$dz = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Если требуется вычислить частные производные функции многих переменных, особенно если надо вычислить все производные