Из свойств 5 и 1 п. 28.1 следует, что

$$\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a),$$

$$\int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = M(b-a).$$

Подставляя эти выражения в неравенства (28.32), мы и получим неравенства (28.30).

Следствие. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что* (рис. 87)

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad (28.32)$$

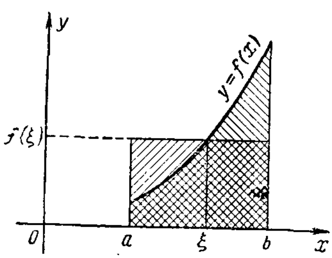

Рис. 87

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть

$$m = \min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

$$M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x), \qquad (28.33)$$

тогда для этих m и M, очевидно, выполняются неравенства (28.29), и потому справедливы неравенства (28.30). Из них получаем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Таким образом, число

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

находится между наибольшим и наименьшим значениями функции f. Согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, отсюда следует, что существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. существует точка ξ, для которой справедливо (28.32).