Теорема 13. *Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть ряд (35.42) абсолютно сходится, т. е. ряд (35.43) сходится; тогда в силу необходимости выполнения условия Коши для сходимости ряда (см. теорему 4), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$, то

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

для любого целого $p \geqslant 0$.

Отсюда и из неравенства $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+p} |u_k|$ следует, что $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ и любого $p = 1, 2, \ldots$. А это и означает в силу достаточности выполнения условия Коши для сходимости ряда, что ряд (35.42) сходится.

Теорема доказана.

Обозначим теперь через

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.44}$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (35.42), но взятых, вообще говоря, в другом порядке.

Теорема 14. *Если ряд* (35.42) *абсолютно сходится, то ряд* (35.44) *также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Пусть ряд (35.42) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (35.43), и пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s}.$$

Обозначим частичные суммы ряда (35.43) через $\tilde{s}_n$, тогда (см. п. 35.4)

$$\tilde{s}_n \leqslant \tilde{s}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.45}$$

Какова бы ни была частичная сумма $\tilde{s}_m^*$ ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|, \tag{35.46}$$

найдется номер $n = n(m)$, такой, что все члены ряда (35.46), входящие в сумму $\tilde{s}_m^*$, имеют в ряде (35.43) номера, не превышающие n, поэтому

$$\tilde{s}_m^* \leqslant \tilde{s}_n^*,$$

где $n = n(m)$, $m = 1, 2, \ldots$.