§ 46. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

46.1. Геометрический смысл модуля якобиана в двумерном случае

Пусть G — открытое множество на плоскости E^2_{uv}, G^* — открытое множество на плоскости E^2_{xy}, F — отображение G на G^* и

$$M=(u, v)\in G, \quad M^*=(x, y)\in G^*, \quad F(M)=M^*.$$

Отображение F задается парой функций

$$\begin{aligned} x&=x(u, v), \\ y&=y(u, v). \end{aligned} \tag{46.1}$$

Будем предполагать, что отображение F удовлетворяет следующим условиям:

1) отображение F взаимно однозначно отображает G на G^*;
2) отображение F непрерывно дифференцируемо на G;
3) якобиан $J(u, v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ не обращается в ноль на G.

Заметим, что отображение F^{-1}, обратное отображению F, также является непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением с якобианом, не равным нулю на G^* (см. п. 41.4).

Лемма 1. *Если γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G, то ее образ $\gamma^* = F(\gamma)$ при отображении F также будет кусочно-гладкой кривой.*

Действительно, если

$$u=u(t), \quad v=v(t), \quad a\leqslant t\leqslant b,$$

— кусочно-непрерывно дифференцируемое представление кривой γ, то представлением кривой γ^* будет пара функций

$$x=x\big(u(t), \quad v(t)\big), \quad y=y\big(u(t), \ v(t)\big), \quad a\leqslant t\leqslant b,$$

которые в силу свойств суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций (см. п. 19.3 и п.20.3) также будут кусочно-непрерывно дифференцируемыми.

Замечание. Если γ — простой замкнутый контур, лежащий в G, то в силу взаимной однозначности отображения F его образ $\gamma^* = F(\gamma)$ также является простым замкнутым контуром.

Лемма 2. *Пусть Γ — открытое ограниченное множество и $\overline{\Gamma}\subset G$. Тогда $\Gamma^*= F(\Gamma)$ — также ограниченное открытое множество и*

$$\partial F(\Gamma)=F(\partial\Gamma). \tag{46.2}$$