Например, если $x = F(u)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого множества $D \subset E_u^n$ на открытое множество $G \subset E_x^n$ и якобиан $J(u)$ этого отображения нигде не обращается в ноль на D, то

$$\int f(x)\, dG = \int f[F(u)]\, |J(u)|\, dD.$$

Доказать это можно точно так же, как доказана теорема 2' в п. 46.2; следует только вместо полной аддитивности интеграла использовать определение (48.1).

Используя аддитивность несобственного кратного интеграла, определение (48.1) можно переписать в другом эквивалентном виде. Замечая, что для кубируемого множества $\Gamma \subset G$, справедливо равенство

$$\int f\, dG - \int f\, d\Gamma = \int f\, d(G \setminus \overline{\Gamma}), \tag{48.2}$$

можно сказать, что интеграл $\int f dG$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G,

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, d(G \setminus \overline{G}_k) = 0. \tag{48.3}$$

Упражнение 1. Доказать формулу (48.2); в частности, показать, что интегралы $\int f dG$ и $\int f d(G \setminus \overline{\Gamma})$ одновременно сходятся или расходятся.

48.2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1. *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $G \subset E^n$. Тогда либо функция f интегрируема (в несобственном смысле), либо*

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, dG_k = +\infty$$

для любой монотонно исчерпывающей множество G последовательности кубируемых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$.

В последнем случае пишут

$$\int f\, dG = +\infty.$$

Доказательство. Очевидно, теорема будет доказана, если показать, что для любой монотонно исчерпывающей область G