тенциальность поля, существование потенциальной функции и условие, что вихрь поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.

Определение 8. *Пусть S — некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области G, $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль на поверхности, задающая ее ориентацию, и S^+ — поверхность S с указанной ориентацией. Интеграл*

$$\iint_{S^+} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$$

называется потоком векторного поля через поверхность S и обозначается $\iint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$, где $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nu}\, dS$ $\left(или \iint_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+,\ d\boldsymbol{S}^+ = \boldsymbol{\nu}\, dS\right)$.

Очевидно, что $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu} = \text{пр}_{\nu}\, \boldsymbol{a}$, поэтому

$$\iint_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \iint_S \text{пр}_{\nu}\, \boldsymbol{a}\, dS.$$

Обычно в потоке $\iint_{S^+} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$ опускают индекс ориентации и пишут просто $\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$, считая, что в качестве ориентации взята нормаль $\boldsymbol{\nu}$, стоящая в подынтегральном выражении.

Определение 9. *Векторное поле, поток которого через любую кусочно-гладкую поверхность, лежащую в области G и являющуюся границей некоторой ограниченной области, равен нулю, называется соленоидальным в G.*

В дальнейших пунктах этого параграфа мы изучим некоторые свойства векторных полей, в частности, установим в трехмерном случае необходимые и достаточные условия потенциальности и соленоидальности поля. Предварительно мы докажем теоремы об интегралах, тесно связанные с понятиями, введенными в этом пункте.

Упражнение 1. Доказать следующие формулы:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}, \quad \text{где} \quad \Delta \boldsymbol{a} = (\Delta a_x,\ \Delta a_y,\ \Delta a_z),$$

$$\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z);$$

$$\operatorname{div} (f\boldsymbol{a}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f\boldsymbol{a};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}.$$