Полагая, например, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и обозначая соответствующие ступенчатые функции φ через φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность ступенчатых функций φ_n, для которой выполняется условие (55.7).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Для всякой одноступенчатой функции $\varphi(x)$, равной 1 на полуинтервале $[\xi, \eta)$ и нулю вне его, очевидно, имеем

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_\xi^\eta \sin \nu x \, dx = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0.$$

Так как любая ступенчатая функция является линейной комбинацией одноступенчатых функций указанного вида, то утверждение теоремы верно и для любой ступенчатой функции.

Если теперь функция f является абсолютно интегрируемой на промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$, согласно лемме, существует ступенчатая функция φ, такая, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, существует такое ν_ε, что при $\nu \geqslant \nu_\varepsilon$

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

тогда при $\nu \geqslant \nu_\varepsilon$ имеем также

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \nu x \, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx \right| < \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x \, dx = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx = 0.$$

Теорема доказана.