$\rho(x_n, y_n)$ также фундаментальная, т. е. удовлетворяет условию Коши (см. п. 3.2). Действительно, для любых номеров n и m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

и, следовательно, в силу симметрии индексов n и m

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \qquad (57.4)$$

Из фундаментальности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (57.5)$$

Из (57.4) и (57.5) для $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ получаем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ является фундаментальной, т. е. удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Положим по определению $\rho(x^*, y^*) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. В силу доказанного указанный предел существует. Покажем, что так определенная функция $\rho(x^*, y^*)$ не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ и удовлетворяет аксиомам расстояния.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{x'_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{y'_n\} \in y^*$, тогда

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

и

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

В силу эквивалентности последовательностей $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ и соответственно — $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

III. Проверка аксиом расстояния для $\rho(x^*, y^*)$

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Если $\rho(x^*, y^*) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалент-