вательности (58.45) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_ε, что при любом номере $k \geqslant k_\varepsilon$ и любом натуральном p выполняется неравенство

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}\right)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда для любого фиксированного натурального числа m и подавно

$$\sum_{n=1}^{m} \left(x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}\right)^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя здесь к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m} \left(x_n - x_n^{(k)}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

и так как это верно при любом $m = 1, 2, \ldots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n - x_n^{(k)}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad k \geqslant k_\varepsilon. \tag{58.46}$$

Таким образом, точка $y^{(k)} = \left(x_1 - x_1^{(k)}, \ldots, x_n - x_n^{(k)}, \ldots\right)$, $k \geqslant k_\varepsilon$, принадлежит пространству l_2, но тогда и точка $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x^{(k)} + y^{(k)}$ также принадлежит пространству l_2, а условие (58.46) означает, что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x.$$

Итак, мы доказали, что последовательность (58.45) сходится. Следовательно, l_2 — полное пространство.

Теорема доказана.

В силу теоремы 9 пространство l_2 изоморфно каждому сепарабельному гильбертову пространству. В дальнейшем мы увидим (см. п. 58.5), что пространство $L_2[a, b]$ также сепарабельно и, следовательно, изоморфно пространству l_2. Можно показать, что и пространство $L_2(G)$, где G — кубируемое множество n-мерного пространства, также сепарабельно и, следовательно, изоморфно l_2. Таким образом, все гильбертовы пространства интегрируемых в квадрате функций независимо от числа переменных, от которых зависят эти функции, изоморфны между собой,