Функция $\varphi(t)$, очевидно, также $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем из (60.21) и того, что $\omega^{(n+1)}(t)=(n+1)!$, имеем

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!\,\frac{R(x)}{\omega(x)}. \qquad (60.22)$$

Далее, функция $\varphi(t)$ обращается в ноль в $n+2$ точках $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; поэтому в силу теоремы Ролля ее производная обращается в ноль по крайней мере в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$, и вторая производная — в n точках и т. д. По индукции получим, что $n+1$ производная функция φ обращается по крайней мере один раз в ноль внутри отрезка $[a, b]$.

Пусть $\varphi^{(n+1)}(\zeta)=0$, $a<\zeta<b$, тогда из (60.22) получим

$$R(x)=\frac{\omega(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta),$$

или, подробнее,

$$R(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\zeta),$$

$$a\leqslant x\leqslant b,\ a<\zeta<b.$$

Отсюда следует оценка остаточного члена

$$|R(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)|\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Заметим, что, вообще говоря, даже для аналитических на отрезке $[a, b]$ функций остаточный член интерполяции не стремится к нулю на отрезке $[a, b]$ при $n\to\infty$, т. е. интерполяционные полиномы не сходятся к самой функции. Построение соответствующих примеров достаточно громоздко, поэтому мы не будем на этом останавливаться.

60.4. Квадратурные формулы

Рассмотрим теперь некоторые способы приближенного интегрирования функций. Формулы для приближенных значений интегралов называются *квадратурными формулами.*

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками x_k, $k=1, 2, \ldots, n-1$:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b;\ x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n},$$

$$k=1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Квадратурные формулы, которые мы рассмотрим, будут получаться посредством замены при интегрировании функции f на каж-