в физике, являются гармоническими функциями, и любую гармоническую функцию можно представлять физически как потенциал некоторого поля. Поэтому и в общем случае гармонические функции часто называют *потенциалами*, а теорию гармонических функций — *теорией потенциала.*

41. Свойства гармонических функций. Выясним прежде всего связь между понятиями аналитических и гармонических функций. Эта связь выражается в следующих двух простых теоремах:

Теорема 1. *Действительная и мнимая части произвольной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, однозначной и аналитической в области D, являются в этой области гармоническими функциями.*

Доказательство непосредственно вытекает из условий Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

В самом деле, так как аналитические функции обладают производными всех порядков, то уравнения (1) можно дифференцировать по x и y. Дифференцируя первое из них по x, а второе по y и пользуясь теоремой о равенстве смешанных производных, находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

откуда

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Для функции $v(x,y)$ доказательство аналогично.

Две гармонические в области D функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные условиями Коши — Римана, называются *сопряженными.*

Теорема 2. *Для всякой функции $u(x,y)$, гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x,y)$.*

В самом деле, рассмотрим интеграл

$$v_0(x,\ y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

где $z_0=x_0+iy_0$ — фиксированная, а $z=x+iy$ — переменная точка области D. В силу уравнения Лапласа $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, этот интеграл не зависит от пути интегрирования и является функцией только точки z; мы и обозначаем эту функцию