$f_1^{\pm}(z)$ находятся с точностью до постоянного множителя, ибо индекс функции $a_1(\zeta)$ равен нулю. Для второй пары функций получаем краевое условие в виде

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta).$$

Из него видно, что $f_2^-(z)$ и $z^n f_2^+(z)$ образуют одну аналитическую функцию, правильную во всей полной плоскости и, следовательно, постоянную. Так как в начале координат она равна нулю (ибо внутри C эта функция совпадает с $z^n f_2^+(z)$), то она тождественно равна 0, что невозможно *).

Резюмируем полученные результаты.

Теорема 1 (Ф. Д. Гахов). *Задача Гильберта*

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta)$$

имеет $n+1$ линейно независимых решений вида (13), *если индекс $-n$ граничной функции $a(\zeta)$ неположителен. Если же индекс n положителен, то задача не имеет решений, аналитических в соответствующих областях.*

Перейдем к решению задачи Привалова:

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) + b(\zeta). \tag{1}$$

Пусть сначала индекс функции $a(\zeta)$ равен нулю, т. е. соответствующая задача Гильберта, которая получается, если в условии (1) положить $b(\zeta) \equiv 0$, имеет единственное решение:

$$f_1^{\pm}(z) = e^{-F^{\pm}(z)}, \tag{14}$$

где $F(z)$ определяется интегралом (4). Решение задачи Привалова снова ищем в виде произведения $f^{\pm}(z) = f_1^{\pm}(z) f_2^{\pm}(z)$, где функции $f_1^{\pm}(z)$ определяются формулой (14). На контуре C должно выполняться соотношение

$$f_1^- f_2^- = a f_1^+ f_2^+ + b = f_1^- f_2^+ + b$$

(мы заменили $a f_1^+$ по условию (2) на f_1^-). После подстановки сюда $f_1^-(\zeta)$ из (14) мы получаем краевое условие для $f_2(z)$:

$$f_2^+(\zeta) - f_2^-(\zeta) = -b(\zeta)\, e^{F^-(\zeta)}. \tag{15}$$

---

*) Если допустить, что искомая функция может иметь полюс в некоторой точке, например точке $z=\infty$, то задача будет разрешимой. Если индекс $a(\zeta)$ равен n, то существует единственное решение, имеющее в бесконечности полюс порядка $\leqslant n$, см. Гахов [13].