предположим, что в плоскости z_2 образ кривой C удовлетворяет условиям

$$a_1\alpha < y_2 < a_2\alpha, \quad |y_2'| < a_3\alpha^{3/2}, \quad |y_2''| < a_4\alpha, \quad |y_2'''| < a_5\alpha^{1/2}, \tag{6}$$

где a_k — некоторые постоянные. По формуле (25) п. 65 мы получаем тогда приближенное выражение

$$\left|\frac{d\zeta_2}{dz_2}\right| = \frac{\alpha}{y_2}\left(1 + \frac{1}{3}y_2y_2''\right) + O(\alpha^{5/2})$$

или после перехода к переменным z_1 и ζ_1:

$$\left|\frac{d\zeta_1}{dz_1}\right| = \frac{1}{y_1}\left(1 + \frac{1}{3}y_1y_1''\right) + O(\alpha^{5/2}).$$

Подставляя это выражение в формулу (4), мы получим с учетом условий (6) приближенное уравнение, справедливое с точностью до малых порядка $O(\alpha^{5/2})$ вдоль кривой, соответствующей C в плоскости z_1:

$$\frac{1}{y_1^2}\left(1 + \frac{2}{3}y_1y_1''\right) + 2\nu y_1 = c. \tag{7}$$

Примем еще за новую действительную ось плоскости z прямую $y = H$, т. е. положим $y = H(1+\eta)$, или, что то же самое, $y_1 = 1 + \eta$; тогда уравнение (7) перейдет в уравнение

$$\frac{2}{3}\eta'' + 2\nu(1+\eta)^2 + \frac{1}{1+\eta} - c(1+\eta) = 0.$$

Если выбрать постоянную c так, чтобы $\eta = 0$ было решением последнего уравнения ($c = 2\nu + 1$) и воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{1+\eta} = 1 - \eta + \eta^2 - \frac{\eta^3}{1+\eta},$$

то это уравнение можно будет переписать в виде

$$\eta'' + 3(\nu - 1)\eta + \frac{3}{2}(2\nu + 1)\eta^2 - \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{1+\eta} = 0. \tag{8}$$

Так как мы ищем решения, мало отклоняющиеся от прямой $y = H$, то η можно считать малой величиной. Мы предположим, что $\max|\eta|$ имеет порядок α, тогда с принятой степенью точности в левой части (8) последний член можно отбросить. Вводя вместо ν величину $\alpha = \nu - 1$ и пренебрегая членом $\alpha\eta^2$, мы получим окончательно *):

$$\eta'' + 3\alpha\eta + \frac{9}{2}\eta^2 = 0. \tag{9}$$

*) При выводе уравнения (9) в первом издании книги был допущен ряд погрешностей, на которые нам любезно указал Н. Н. Моисеев.