В самом деле, рассмотрим интеграл

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left\{\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau\right\}dp$$

(см. формулу (10)). Так как в полуплоскости $\operatorname{Re} p\geqslant a$ интеграл $\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau$ сходится равномерно относительно $p$ (см. доказательство теоремы 1), то можно изменить порядок интегрирования *), и мы получим:

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}\,dp=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-t}^\infty f(\xi+t)e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi$$

(мы заменили $\tau-t=\xi$). Полагая $g(t)=f(t)e^{-at}$ и учитывая, что $g(t)=0$ для всех $t<0$, мы получаем

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-\infty}^\infty \frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\sin b\xi\,d\xi+\frac{1}{\pi}f(t)\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi. \qquad (12)$$

Интеграл во втором слагаемом — это интеграл Эйлера (см. пример 2 п. 73), он равен $\pi$ при любом $b>0$, и, значит, второе слагаемое равно $f(t)$. Для доказательства нужного нам соотношения $\lim\limits_{b\to\infty} f_b(t)=f(t)$ остается, следовательно, доказать, что первое слагаемое в (12) стремится к 0 при $b\to\infty$. Для этого нам понадобится

Лемма. *Для любой функции* $\varphi(\xi)$, *интегрируемой на отрезке* $[\alpha,\beta]$,

$$\lim_{b\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\sin b\xi\,d\xi=0.$$

Действительно, если $\varphi(\xi)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, то все доказывается интегрированием по частям:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\sin b\xi\,d\xi=-\varphi(\xi)\frac{\cos b\xi}{b}\Big|_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta\varphi'(\xi)\frac{\cos b\xi}{b}\,d\xi\to 0$$

*) Это непосредственно вытекает из известной теоремы анализа, см., например, Фихтенгольц, т. II, стр. 733.