3) Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi \cos^{q-1}\varphi \, d\varphi$$

подстановкой $\sin\varphi = x$ приводится к интегралу, вычисленному в примере 2)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi \cos^{q-1}\varphi \, d\varphi = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^{\frac{q}{2}-1} \, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \tag{5}$$

4) Полагая в предыдущем примере $p-1=r$, $q-1=-r$ $(-1<r<1)$ получим, в частности:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^r \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right).$$

Но по второму функциональному уравнению для гамма-функции (формула (16) п. 89) $\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+r}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\cos\frac{\pi r}{2}}$, т. е.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^r \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi r}{2}}. \tag{6}$$

5) К гамма-функции сводится после подстановки $\ln\frac{1}{x} = t$ интеграл

$$\int_0^1 \ln^p \frac{1}{x} \, dx = \int_0^\infty e^{-t} t^p \, dt = \Gamma(p+1). \tag{7}$$

6) К эйлеровым интегралам сводятся также *полные эллиптические интегралы* при значении модулей $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. п. 39):

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}; \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi} \, d\varphi.$$

Действительно, подстановка $\cos\varphi = t$, а затем $t^4 = \tau$ приводит первый из них к виду

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \, d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); \tag{8}$$