Для вывода первой формулы дифференцирования мы отправляемся от соотношения (8), из которого получаем:

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$

или, подставляя $w = \operatorname{sn} z$,

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z. \tag{20}$$

Для получения других формул дифференцируем соотношения

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1, \tag{21}$$

которые непосредственно следуют из равенств (19); тогда получаем:

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z. \tag{22}$$

Заметим, что при $k = 0$ формула (20) и первая из формул (22) обращаются в известные формулы дифференцирования $\sin z$ и $\cos z$. Отметим еще, что из формул (22), если выразить в них с помощью (21) sn и dn через cn и, соответственно, sn и cn через dn, получаются следующие дифференциальные уравнения для $w = \operatorname{cn} z$ и $w = \operatorname{dn} z$:

$$\frac{dw}{dz} = -\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}, \quad \frac{dw}{dz} = -\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}, \tag{23}$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль. Учитывая, что $\operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1$ (это следует из (19) и равенства $\operatorname{sn} 0 = 0$) и что $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ — четные функции, мы видим из формулы (23), что эти функции обращают, соответственно, интегралы

$$z = \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}}; \quad z = \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}}. \tag{24}$$

Для вывода теорем сложения мы воспользуемся методом, идея которого восходит еще к Эйлеру и который послужил первым толчком для исследования эллиптических интегралов. Следуя Эйлеру, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} + \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} = 0.$$

Найдя независимым образом два его интеграла и сравнивая эти интегралы, мы получим искомое соотношение, выражающее тео-