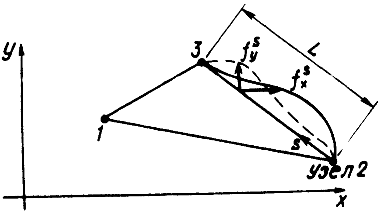

Рис. 3.17. Осесимметричный элемент с поверхностной нагрузкой

$$\mathbf{R}_s=\int_s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-\frac{s}{L} & 0 \\ \frac{s}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{s}{L} \\ 0 & \frac{s}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{bmatrix} \left[x_2\left(1-\frac{s}{L}\right)+x_3\frac{s}{L}\right] ds\ . \qquad (ж)$$

Рассматривая интегралы в выражениях (в) и (ж), можно заметить следующее. Во-первых, вычисление интегралов возможно как в замкнутом виде, так и численно (см. разд. 4.6). Во-вторых, матрицы жесткости, масс и нагрузок, соответствующие конечному элементу плоской задачи, легко получить: (1) — исключая четвертую строку матрицы $\mathbf{E}$, используемой в (в) и (д); (2) — введением соответствующей матрицы $\mathbf{C}$ в (в); (3) — применяя в качестве дифференциала объема $t\,dx\,dy$ вместо $x\,dx\,dy$, где t — толщина элемента (обычно принимаемая равной 1 для плоского деформированного состояния). Таким образом, решение осесимметричной и плоских задач можно совместить в одной программе для ЭВМ. Кроме того, матрица $\mathbf{E}$ показывает, что условие постоянства ϵ_{xx}, ϵ_{yy} и γ_{xy} реализуется в любой задаче.

Решение трех перечисленных выше задач с помощью единой программы для ЭВМ будет продемонстрировано в разд. 4.8, где обсуждается эффективная численная реализация изопараметрического конечного элемента.

Пример 3.6

Получить матрицы $\mathbf{\Phi}(x,y)$, $\mathbf{E}(x,y)$ и $\mathbf{A}$ для прямоугольного элемента изгибаемой плиты (рис. 3.18).

Этот элемент был одним из первых изгибаемых конечных элементов [29, 37]. Как и в прим. 3.5, цель данного примера заключается в показе основных положений методики, изложенной в этом разделе. Следует заметить, что уже разработаны более точные конечные элементы для изгибаемых плит (см. гл. 4) [38 – 41].

Как показано на рис. 3.18, элемент плиты характеризуется тремя степенями свободы в узле. Таким образом, нужны 12 обобщенных координат $\alpha_1,\ldots,\alpha_{12}$ для аппроксимации w Соответствующий полином принят в виде:

$$w=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 x^2+\alpha_5 xy+\alpha_6 y^2+\alpha_7 x^3+\alpha_8 x^2 y+\alpha_9 xy^2+$$
$$+\alpha_{10} y^3+\alpha_{11} x^3 y+\alpha_{12} xy^3.$$