Пример 11.17

Вычислить коэффициенты характеристического полинома задачи $K\varphi=\lambda M\varphi$ для K и M из примера 11.4

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix} 5-2\lambda & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6-2\lambda & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Раскрывая определитель по первой строке (см. разд. 1.8), будем иметь

$$p(\lambda)=(5-2\lambda)\det\begin{bmatrix} 6-2\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}+(4)\det\begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}+$$

$$+(1)\det\begin{bmatrix} -4 & 6-2\lambda & 1 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Далее запишем

$$\begin{aligned} p(\lambda)= {} & (5-2\lambda)\{(6-2\lambda)[(6-\lambda)(5-\lambda)-16]+ \\ & +4[-4(5-\lambda)+4]+16-(6-\lambda)\}+ \\ & +4\{-4[(6-\lambda)(5-\lambda)-16]+4(5-\lambda)-4\}+ \\ & +\{-4[(-4)(5-\lambda)+4]-(6-2\lambda)(5-\lambda)+1\} \end{aligned}$$

и окончательно приходим к следующему выражению

$$p(\lambda)=4\lambda^4-66\lambda^3+276\lambda^2-285\lambda+25.$$

В общем случае при достаточно больших порядках матриц не удается вычислить коэффициенты полинома так же легко, как и в приведенном примере, так как непосредственное раскрытие определителя требует порядка $n!$ операций, что практически невыполнимо. Поэтому на этом этапе могут быть использованы различные методики, но как только коэффициенты полинома получены, то для нахождения его корней может быть использован метод хорд или метод Ньютона.

Хотя использование этого алгоритма кажется наиболее естественным, однако на пути его применения стоит одна серьезная проблема. Дело в том, что малые возмущения коэффициентов полинома могут привести к диагональным изменениям его корней. Но незначительные ошибки в коэффициентах всегда неизбежны из-за существования ошибок округления при выполнении операций на ЭВМ, поэтому явное вычисление коэффициентов $a_0,\dots,a_n$ из K и M с последующим определением собственных значений практически не используется.

11.4.2. Итерации с полиномами в неявной форме. В алгоритме итераций с полиномами в неявной форме значений $p(\lambda)$ вычисляется непосредственно, т.е. без определения коэффициентов $a_0,\dots,a_n$ из (11.115). Значение $p(\lambda)$ может быть получено путем разложения $K-\lambda M$ в произведение нижней треугольной матрицы L с единичной диагональю и верхней треугольной матрицы S, т.е.