$$\frac{db_m}{dt}+[\alpha(2\pi m)^2]\,b_m+\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\frac{db_j}{dt}+[\alpha(2\pi J)^2]\,b_j\right\}=\alpha(2\pi J)^2, \qquad (5.141)$$

$$1\leqslant m\leqslant J-1;$$

$$\frac{2\,db_0}{dt}=\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\frac{db_j}{dt}+[\alpha(2\pi J)^2]\,b_j\right\}=\alpha(2\pi J)^2. \qquad (5.142)$$

Уравнения (5.140) образуют систему связанных между собой обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов a_j, не зависящих от обыкновенных дифференциальных уравнений (5.141) и (5.142) для определения коэффициентов b_j. Эти две системы решаются маршевым образом по времени, чтобы предоставить значения $a_j(t)$ и $b_j(t)$, подставляемые затем в выражение (5.138), обеспечивая тем самым численное решение $T(x, t)$.

Однако какой бы маршевый алгоритм ни был использован при последовательном определении во времени коэффициентов a_j и b_j, на каждом шаге по времени необходимо проводить начальную факторизацию и матричное умножение. Если учесть, что данная задача линейная и что достаточно точные решения могут быть построены при сравнительно малом числе членов в выражении приближенного решения (5.136), добавочное время исполнения алгоритма, связанное со взаимосвязанностью уравнений, не является чрезмерно большим.

Первоначальные значения a_j^0 и b_j^0 получаются за счет подгонки приближенного решения (5.136) к начальному решению (5.134), т. е.

$$b_0=\frac{11}{6},\quad a_j=2\int_0^1\overline{T}(x,0)\sin(2j\pi x)\,dx,\quad b_j=2\int_0^1\overline{T}(x,0)\cos(2j\pi x)\,dx. \qquad (5.143)$$

Численное решение данной задачи следует построить в задаче 5.17.

Имеется возможность воспользоваться альтернативной процедурой, называемой тау-методом и тесно связанной с методом Галёркина. При использовании тау-метода весовые функции подбираются так, чтобы они соответствовали аппроксимирующим функциям в выражении (5.136), т. е.

$$\begin{aligned} W_{m(x)}&=\sin[m(2\pi x)], & 1\leqslant m\leqslant J-1,\\ W_{m(x)}&=\cos[m(2\pi x)], & 1\leqslant m\leqslant J. \end{aligned} \qquad (5.144)$$

Подстановка (5.136) в уравнение (5.121) и расчет согласно (5.5) на основе формул (5.144) приводит к следующей системе